Вычислить.

1). $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$

2). $\int (3x+4)e^{3x}dx$

1 Определенный интеграл и его основные свойства

Определение Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_i в каждом из них, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция называется интегрируемой подынтегральной функцией на $[a;b]$, то есть $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$.

При этом число a называется нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом, x - переменной интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)dx\,;$$

2) Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx\,;$$

3) Свойство аддитивности.

Если отрезок $[a;b]$ разбит на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

4) Если подынтегральная функция в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5) Если на интервале $[a;b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

6.2 Правила вычисления определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Нахождение определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага:

- на первом шаге, используя технику нахождения неопределённого интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для $f(x)$;

- на втором подсчитывают разность значений первообразной в точках a и b. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$, то есть:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x); v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a;b]$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \qquad (2)$$

Интегрирование чётной и нечётной функции

Если $f(x)$- чётная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$$

Если $f(x)$ - нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx$

Решение:

$$\int\limits_0^{2\pi} x \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \cos 2x dx; v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sin 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{4} \cdot \cos 4\pi - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$$

Задания для решения в аудитории

Вычислить интегралы

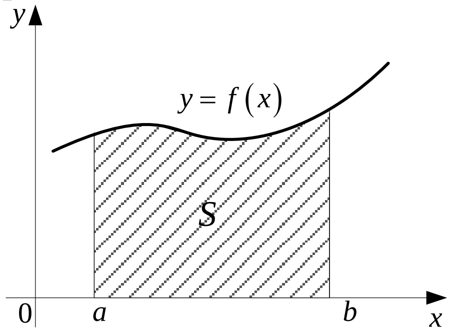
1) $\int\limits_2^3 \left(4x^2 + \frac{1}{x^3} \right) dx$

2) $\int\limits_0^2 3e^{\frac{x}{4}} dx$

6.3 Приложения определенного интеграла

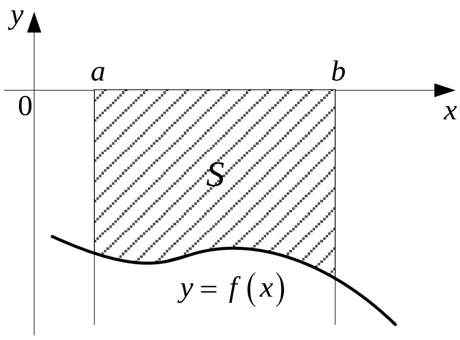
Вычисление площадей плоских фигур

1. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$ равна:



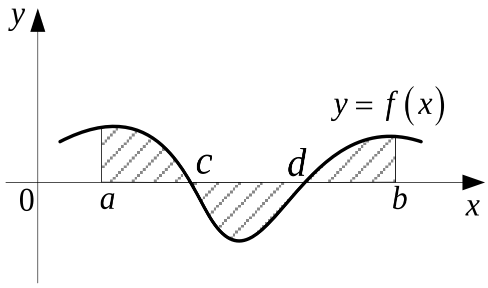
$$S = \int\limits_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

2. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \le 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$, равна:



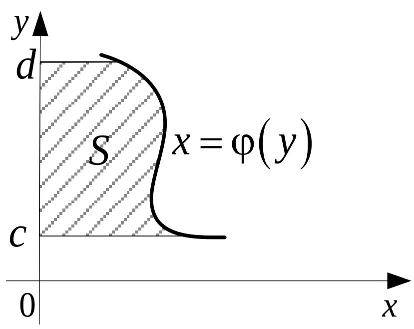
$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

3. Если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Площадь такой криволинейной трапеции соответственно равна:



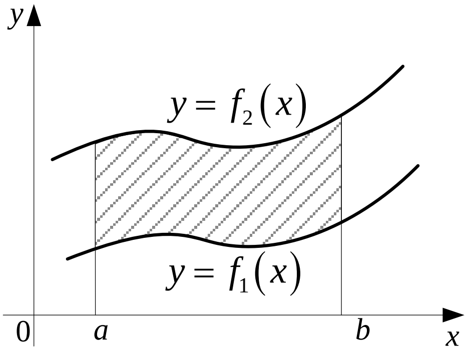
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

4. Если основанием криволинейной трапеции является отрезок $[c;d]$ оси Oy, тогда площадь такой фигуры равна:



$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \qquad (3)$$

5. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \ge f_1(x)$. Тогда площадь фигуры, заключённой между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле:

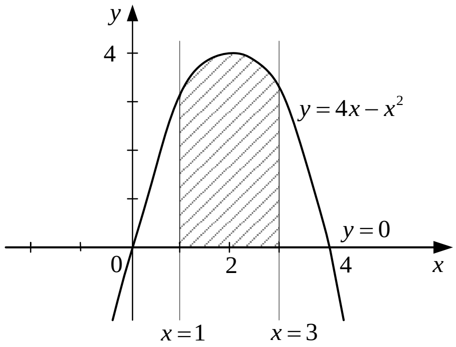


$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \qquad (4)$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$; $x=1; x=3$ и осью Ox.

Решение:



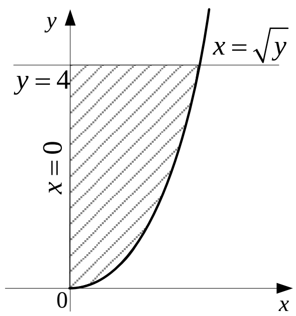
Воспользуемся формулой $S=\int_a^b f(x)dx$, тогда $a=1; b=3; f(x)=4x-x^2$, следовательно,

$$S=\int_1^3\left(4x-x^2\right)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=18-9-2+\frac{1}{3}=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}\,(кв.ед.)$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{y}$; $x=0; y=4$.

Решение:



Воспользуемся формулой $S=\int_c^d\varphi(y)dy$, где

$c=0; d=4; \varphi(y)=\sqrt{y}$

Тогда $S=\int_0^4\sqrt{y}dy=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{16}{3}\,(кв.ед.)$

Задания для решения в аудитории

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1) $y=4-x^2; y=x^2-2x$

2) $y=x; y=2-x^2$